Una Aproximación al Equilibrio General En Una Economía Con Externalidades en el Consumo

Leandro Vivas Fuentes

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y ADMINISTRATIVAS
PROGRAMA DE ECONOMIA
PEREIRA
2011

Una Aproximación al Equilibrio General En Una Economía Con Externalidades en el Consumo

Leandro Vivas Fuentes

Asesorado por

Juan Pablo Saldarriaga Muñoz

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y ADMINISTRATIVAS
PROGRAMA DE ECONOMIA
PEREIRA
2011

A mis padres, Jaime y Nelly, y hermanos, Adriana y Emerson

A la memoria de mis abuelos.

AGRADECIMIENTOS

A mi maestro, asesor y amigo Juan Pablo Saldarriaga Muñoz, por sus lecciones,

A mis amigos, porque su amistad ha sido enriquecedora,

A Juliana Ocampo Fernández, por su apoyo y compañía en este proceso.

A la Universidad Católica de Pereira...

RESUMEN

Se considera un modelo de intercambio puro en donde el conjunto de consumo y las preferencias de cada familia dependen de las dotaciones iniciales, de cada familia, y de las elecciones de los otros hogares. A partir del trabajo realizado por Del Mercato (2004), en el marco de un modelo diferencial de equilibrio general con externalidades en el consumo, se presenta un ejercicio con una forma funcional tipo Cobb-Douglas, el cual a partir de las condiciones de primer orden y las condiciones de vaciado del mercado, da cuenta de un equilibrio con precios y consumo positivos.

PALABRAS CLAVE: Externalidades, equilibrio general, consumidores, economía de intercambio puro.

ABSTRACT

We consider a pure exchange model where the consumption set and preferences of each family depends on the initial endowment of each family, and the choices of other households. To start from the work of Del Mercato (2004), in the context of a differential model of general equilibrium with externalities in the consumption, we present a exercise with a functional form type Cobb-Douglas, which from the first order conditions and the market clearing conditions, realizes for an equilibrium with prices and consumption positives.

KEY WORDS: Externalities, general equilibrium, consumers, pure exchange economy

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

En 1874, Walras[1] describe el equilibrio general de una economía, partiendo de la premisa de que los mercados están interrelacionados, como la igualdad simultánea de la oferta y la demanda en todos los mercados, planteando así un modelo matemático de una economía competitiva que intentaba explicar el estado de equilibrio alcanzado por un grupo de agentes que interactúan en un mercado. Sin embargo, Walras logró dar cuenta de que si no existía un argumento matemático que estuviese a favor de la existencia de, por lo menos, un estado de equilibrio, su teoría estaría vacía.

En la década de 1930, Wald provee el primer análisis riguroso de equilibrio general, basándose en los principios desarrollados entre 1932 y 1934 por Neisser (1932), Zeuthen (1933), von Stackelberg (1933), y Schlesinger (1935). Pero fueron Arrow y Debreu (1954) quienes demostraron la existencia de un estado de equilibrio general a partir de un enfoque de teoría de conjuntos, empleando el teorema de punto fijo de Kakutani (1941), Debreu (1982, pp. 697-698). La prueba de existencia en modelos de equilibrio general asegura consistencia del modelo, en el caso de modelos que requieren de existencia genérica (del equilibrio general), en las últimas décadas, se han empleado nuevas metodologías que involucran argumentos homotópicos y *Degree Theory,* Villanacci, Carosi, Benevieri, y Battinelli (2002).

Cuando en un mercado competitivo se verifica la existencia de un equilibrio general, surgen preguntas tales como; ¿Existe un único equilibrio en la economía?, ¿Son eficientes estos equilibrios?. En el primer caso, la unicidad del equilibrio, cuando existen equilibrios múltiples, el poder de predicción del modelo podría estar limitado, como también los equilibrios pueden estar en función de los precios, es decir, un cambio en los precios podría conducir a la economía a un nuevo estado de equilibrio, Villanacci, Carosi, Benevieri, y Battinelli (2002).

[1] Walras (1874) “Elements d’economie politique pure. Laussanne: L. Colbaz. En 1954 fue traducido por William Jaffé como: *Elements of pure economics*. Homewood, IL: Richard D. Irwin.” Véase en: Arrow y Intriligator, (2000)

En el segundo caso, bajo planteamientos neoclásicos de los agentes económicos, en un mercado puede verificarse la existencia de uno o varios equilibrios, que pueden resultar eficientes si no hay una redistribución de recursos, de tal forma que no hay una mejora individual sin perjudicar el bienestar colectivo. “Cualquier asignación eficiente puede alcanzarse como un equilibrio competitivo, mediante una adecuada redistribución de la riqueza” Villar (1996, p. 117). Cuando los equilibrios no son eficientes, una asignación eficiente en el sentido de Pareto se puede alcanzar como un equilibrio competitivo, como también mediante una redistribución del ingreso, en las dotaciones iniciales, se pueden configurar los estados finales de los equilibrios y sus respectivos niveles de eficiencia[2] Villar (1996).

Un caso particular en el cual los equilibrios alcanzados no son óptimos, o no existe equilibrio, es cuando la utilidad (si se habla de un consumidor) o beneficio (si se trata de una firma) de un individuo está influenciada por otro, de manera que se incurre en modificaciones al bienestar del individuo afectado y, además, las modificaciones a dicho bienestar no se compensan para restablecer el nivel inicial de utilidad o beneficio, este suceso se conoce como una externalidad o efecto externo, de modo que la externalidad puede tener un efecto positivo o negativo sobre el afectado. En este sentido, Baumol y Oates (1982) proponen diferencias en las externalidades negativas: el caso de una externalidad negativa agotable, en la que existe un mecanismo de precios o la imposición de barreras de entrada, garantizarían, de ser las adecuadas, niveles deseables de daño eficientes y compensatorios, y las externalidades inagotables, en que el mecanismo de precios no es efectivo para la corrección del mismo.

A manera de ejemplo, para dar solución a los problemas de externalidades negativas, Pigou (1920) propone el cobro de una tasa de impuesto óptima[3], la cual debe compensar los daños causados al agente que se le ha disminuido el bienestar; de tal forma que la compensación la debe efectuar el causante del

[2] Estos se denominan: Los Teoremas del Bienestar. Para una ampliación véase: Villar (1996, pp. 150-153)

[3] Para una comprensión más extensiva de este principio véase: Sandmo (1975) en el cual se integran a la teoría de la distribución óptima el análisis de los impuestos indirectos para contrarrestar los efectos negativos externos. Muestra que el principio del impuesto Pigoviano puede ser valido como parte de un sistema más comprensivo de impuestos. El trabajo presenta un modelo que considera efectos distribucionales

malestar, Stiglitz (1988, p. 246). Por otra parte, Coase (1960) propone que es más conveniente asignar derechos de propiedad del bien de uso común que causa la externalidad, que permita por medio de contratos un conjunto de pagos que restituyan el bienestar perdido, ya que la actividad regulatoria de un tercer agente también incurre en costos de transacción y, en consecuencia, las compensaciones no son dirigidas a los afectados en su totalidad.

La existencia de una solución de equilibrio general en presencia de externalidades, es relevante, puesto que, "si no existe solución, la discusión teórica sobre política carece de sentido" Baumol y Oates (1982). Londoño y Saldarriaga (2003) señalan la importancia que, para la teoría económica, tiene la existencia del equilibrio general en una economía, ya que de no ser demostrado tal equilibrio los equilibrios parciales no tendrían cabida o validez. Londoño y Saldarriaga demuestran la existencia en una economía walrasiana con juegos cooperativos de Nash, mediante el teorema de punto fijo de Brouwer, con el fin de reafirmar la consistencia de la teoría microeconómica y los equilibrios parciales propios de la microeconomía.

Por todo lo anterior, el presente trabajo tiene como objetivo mostrar la existencia de un equilibrio general, en formas funcionales, de una economía de consumo con presencia de externalidades negativas. Para ello, se toma como punto de partida el trabajo realizado por Del Mercato (2004), el cual emplea aproximaciones diferenciales para demostrar la existencia del equilibrio general bajo externalidades.

El documento sigue de la siguiente manera, a continuación se hace una revisión de la literatura acerca de soluciones que se puedan dar a economías con presencia de externalidades y trabajos que den cuenta de existencia de equilibrio general en economías con presencia de externalidades. En adelante se extiende el trabajo presentado por Del Mercato (2004), de modo que se desarrollan formas funcionales en un marco de características similares empleadas por Del Mercato (2004). Bajo la economía planteada se encuentra el estado de equilibrio general.

2. REVISION DE LITERATURA

Esta sección explora, en orden cronológico, documentos que abordan soluciones que se podrían plantear a economías con problemas de externalidades negativas. Posteriormente se exploran documentos que abordan la existencia de equilibrio general en economías con externalidades.

2.1. Aproximaciones al equilibrio general: modelos con externalidades negativas

Para una aproximación al equilibrio general en economías con externalidades; Kehoe, Levine, y Romer (1990) caracteriza los equilibrios de modelos de equilibrio general con externalidades e impuestos, como soluciones para problemas de optimización. Para ello, construye un marco general en el que se maximiza una función de bienestar social distorsionada, para ilustrar cómo los equilibrios pueden ser caracterizados como soluciones a problemas de optimización. Se compara con la caracterización de equilibrios en economías sin impuestos o externalidades de Negishi (1960)[4]

En todos los ejemplos que ilustra se busca caracterizar los respectivos equilibrios Pareto eficientes. Primero se aplica el marco general a economías con externalidades, de modo que se consideran dos ejemplos; uno estático y el otro dinámico[5], con agentes representativos. Posteriormente, se aplica el marco a economías con impuestos distorsivos, en este caso se modifica la función de utilidad en lugar de la función de producción para dar cuenta de la distorsión.

Para estudiar economías con multiplicidad de equilibrios se parte de una economía con dos impuestos y se extiende el análisis a una economía con

[4] Negishi (1960) caracteriza equilibrios en economías con consumidores heterogéneos, pero sin impuestos o externalidades, como solución de problemas de planeación social. La caracterización de Negishi tiene una interpretación en términos Pareto eficientes.

[5] Para todos los ejemplos se caracterizan los equilibrios en sentido Pareto

externalidades. Utilizando técnicas de topología diferencial se puede mostrar que el ejemplo estudiado de los dos impuestos es una economía regular, y que cualquier perturbación pequeña en los parámetros de las formas funcionales de esos ejemplos da lugar a economías cuyos equilibrios tienen las mismas características cualitativas. La multiplicidad de equilibrios puede ocurrir en una economía de generaciones traslapadas debido al número infinito de consumidores.

Por otra parte, Alonso, Caballé, y Raurich (2004) en un modelo de equilibrio competitivo de acumulación de capital donde las preferencias individuales están sujetas a la formación de hábitos y el excedente de consumo[6]. Muestra que las externalidades del consumo interactúan con hábitos para generar un equilibrio dinámico ineficiente[7].

La externalidad se puede definir como el hecho de que el nivel de consumo de un individuo es afectado por el nivel de consumo de sus vecinos, a su vez que el consumo excedente bien puede reducir o incrementar la felicidad que cada individuo obtiene de su propio consumo (hábitos ajustados), entonces los individuos pueden exhibir envidia o altruismo.

Alonso, Caballé, y Raurich (2004) muestran que bajo las especificaciones de preferencias aditivas, el elemento clave para la existencia de ineficiencia dinámica es mediante la interacción de externalidades en el consumo con la dependencia temporal de las preferencias. En presencia de hábitos, las externalidades del consumo presente afecta el nivel de vida futuro y, de este modo, las externalidades tienen consecuencias para la buena voluntad de los individuos para sustituir consumo entre periodos. De manera que emplean una especificación aditiva para las preferencias y analizan las circunstancias bajo las cuales los excedentes son una fuente de ineficiencia; Caracterizan las tasas óptimas de impuestos sobre las rentas e impuesto al consumo y, se muestra que, si la buena voluntad del individuo cambia el consumo presente, para el futuro será

[6] El modelo abarca el "*Catching Up with the Joneses*" y el "*Keeping Up with the Joneses*" que introduce características descritas por Abel (1990) y Galí (1994) respectivamente.

[7] La función de utilidad es una combinación lineal de valores pasados y presentes del consumo propio y del excedente de consumo. Se asume que el consumo pasado impone un nivel mínimo de consumo futuro y, de ahí, se usa una forma funcional aditiva para introducir hábitos.

un consumo bajo subóptimo en comparación a la solución socialmente planificada mediante la caracterización de las mejores políticas fiscales para restaurar la senda eficiente descentralizada.

En otro sentido, Murty (2006) señala que, distinguiendo entre bienes públicos producibles y no producibles, se está en condiciones de proporcionar un modelo de equilibrio general con externalidades que distingue y abarca los tipos de efectos externos de Starrett (1972)[8] y Boyd y Conley (1997). El autor muestra que, si bien la no-convexidad sigue siendo fundamental cuando se presentan los efectos externos típicos propuestos por Starrett, estos no son causados por la discusión típica en Boyd y Conley (1997). En segundo lugar, se encuentra que la noción de un "equilibrio competitivo público", para bienes públicos, yacé en Foley (1967, 1970). Foley permite un mecanismo descentralizado, basado en señales de precio y cantidad, para economías con externalidades, que es capaz de restaurar la equivalencia entre equilibrio y eficiencia incluso en presencia de la no-convexidad. Esto está en contraste con las nociones de equilibrio basadas exclusivamente en señales de precio tal como los impuestos Pigouvianos.

De modo que, Pigou (1932) y Baumol (1972) pueden ser interpretados como un mecanismo descentralizado donde el gobierno es también un agente económico, cuyas acciones (la determinación de impuestos pigouvianos sobre los generadores de la externalidad y la redistribución de los ingresos fiscales) dependen de la información (los precios sombra) que le sean comunicadas por los agentes afectados por la externalidad. Baumol y Bradford (1972) mostraron que, si los efectos perjudiciales de las externalidades sobre las víctimas son suficientemente grandes, el conjunto de tecnología agregada podría también ser no-convexo, Murty (2006).

Murty hace dos contribuciones, primero propone un modelo de equilibrio general con externalidades, que distingue y abarca los tipos de efectos externos de Arrow/Starrett y los de Boyd y Conley (1997). La clave para construir el modelo

[8] Demuestra que la presencia de externalidades en detrimento de la producción origina no-convexidad fundamental en los conjuntos de tecnología de las firmas, entendiéndose la tecnología como la capacidad de la firma para combinar insumos. Considera un ejemplo donde el incremento del nivel de una externalidad reduce la producción máxima que una firma puede producir, dado los niveles de todos los insumos. Implica que la frontera de tecnología también es asintótica para los ejes reservados para la externalidad o coincide con él después de un nivel de externalidad crítico, donde se ha alcanzado que la producción máxima ha caído a cero.

general se encuentra en distinguir entre bienes públicos producibles y no producibles. En Boyd y Conley[9], se centra en el análisis de bienes no producibles, incluye una economía de recursos escasos. Por otra parte, Arrow/Starrett se centran en bienes públicos producibles.

En segundo lugar, propone un mecanismo descentralizado que permita autonomía en la toma de decisiones basada en el precio actual del mercado y señales de cantidad, incorpora el componente Coasiano en el equilibrio propuesto por Boyd y Conley, y restaura la equivalencia entre equilibrio y eficiencia incluso en presencia de no-convexidades. Este concepto es motivado por la noción de un "equilibrio competitivo publico" discutido en Foley (1967, 1970). En el mecanismo de Foley, la demanda de bienes públicos es determinado colectivamente y financiado (en el precio de mercado actual) por una (descentralizada) regla unánime, mientras que su oferta es determinada por la maximización de beneficios al precio del mercado.

En otro sentido, Carbone y Smith (2008) calibra un modelo de equilibrio general con beneficios no separables de la calidad del aire, a fin de medir el exceso de carga y los beneficios netos totales del transporte y de los impuestos a la energía en Estados Unidos en 1995. De forma que se analiza el exceso de carga y los efectos en el bienestar total de las políticas que alteran el nivel de la externalidad. Hace uso de un modelo numérico que se desarrolla para evaluar el exceso de carga originado de un nuevo impuesto introducido en la economía con grandes distorsiones tributarias ya preexistentes. Se añade la externalidad vía contaminación del aire y se asume que la calidad del aire hace que no sean separables los impactos en las preferencias, se calibra el modelo empleando la tasa de emisión y las estimaciones de las compensaciones que los consumidores harían para mejorar la calidad del aire que se basan en estimaciones previas.

Carbone y Smith (2008) consideran dos nuevos impuestos diferentes que podría esperarse que impacten la calidad del aire. El primero consiste en el consumo final de los servicios de transporte y el segundo en el uso de energía intermedia.

[9] Boyd y Conley proponen un mecanismo descentralizado en el espíritu de Coase (1960) para entornos convexos, donde la dotación de esta capacidad es limitada y distribuida entre agentes quienes comercian con ellas. Prueban la equivalencia entre un equilibrio y un óptimo de Pareto. Conley y Smith también prueban la existencia del equilibrio Coasiano en una economía más general que incluye externalidades de consumo.

Usan el experimento de Goulder y Williams (un nuevo impuesto a la energía del 5% con un impuesto sobre la renta del 40%) como punto de referencia. Encuentran que cuando se asume que los bienes son complementarios fuertes, la magnitud del error depende del tamaño de la voluntad marginal a pagar por mejoras en la calidad del aire.

Por otra parte, para entender las relaciones del mercado y la interacción de las externalidades en estos, puede verse Ren, Fullerton, y Braden (2010), quienes desarrollan un modelo teórico de equilibrio general con externalidades entrelazadas vía mercados para plantear una política óptima de impuestos en una economía con presencia de dos externalidades medioambientales. Dependiendo de la elasticidad de sustitución entre los dos productos que generan las externalidades puede evidenciarse que una solución de *Second Best* sería más deseable que una opción de *First Best*, a partir de un sistema de ecuaciones lineales[10]. Se incorporan dos externalidades medio ambientales resultantes de industrias diferentes que interactúan a través de las demandas del mercado. Para corregir el problema se emplean dos impuestos, que están disponibles para el control de las dos externalidades. Con el fin, de evaluar los efectos del cambio en un impuesto (aun cuando el primer impuesto sea óptimo o no) y el segundo impuesto (siendo óptimo) para una externalidad, dada una distorsión de la otra externalidad.

Los trabajos mencionados anteriormente hacen alusión a aproximaciones al equilibrio general, su diferencia yace en los supuestos y el marco en el que se desenvuelve la economía. La eficiencia de estos equilibrios y el sentido de la externalidad negativa logran, en estos, contrastaciones empíricas bajo economías con características peculiares, y por ello son una fuente de apoyo para las decisiones de política económica y de planeación social.

En el grupo de aproximación a equilibrios generales se puede incluir el trabajo realizado por Evans y Hnatkovska (2005), el cual presentan un “nuevo” método numérico para solucionar modelos de equilibrio general con muchos bienes. El

[10]Ren, Fullerton, y Braden (2010) emplean un modelo de equilibrio general, con los supuestos estándar de la competencia perfecta, se asume que la función de producción tiene retornos constantes a escala, todos los mercados se vacían, libre movilidad de factores, y los agentes tienen información completa. En el documento se emplea un proceso de linealización para resolver el sistema de equilibrio general.

método puede ser aplicado a modelos donde hay agentes heterogéneos, conjuntos de oportunidades de inversión variables en el tiempo, y mercados incompletos. También puede ser usado para estudiar modelos donde las dinámicas de equilibrio no son estacionarias. Se ilustra cómo el método es usado para resolver una versión de modelos de uno y dos sectores en dos países con equilibrio general y producción. Se verifica la exactitud del método expuesto en comparación a la solución numérica del modelo para un sector. Se aplica el método para el modelo de dos sectores donde la solución analítica no es válida[11].

El modelo de Evans y Hnatkovska (2005) se basa en las aproximaciones log-lineales de Campbell, Chan y Viceira (2003) y las técnicas de perturbación de segundo orden desarrolladas por Judd (1998) y otros. Se aplicó el método de solución a una versión de uno y dos sectores de un modelo de equilibrio general para dos países con producción. La solución numérica al modelo de un sector se ajusta a las predicciones de la teoría y da confianza en la exactitud del método. El conjunto de activos en este modelo es insuficiente para permitir una distribución del riesgo completa entre los hogares, por lo que la asignación de equilibrio no se puede encontrar por técnicas analísticas estándar. El método provee, a juicio de los autores, la única manera de analizar modelos de equilibrio general con elección de cartera y mercados incompletos.

El enfoque combina métodos de perturbación con aproximaciones de continuidad temporal. Contribuye, primero, en relación con la literatura financiera, en que el método ofrece portafolios óptimos en un equilibrio general ajustado de tiempo discreto, en el que los retornos son endógenamente determinados. También permite caracterizar las dinámicas de los retornos y la inversión estocástica del conjunto de oportunidades como funciones de variables macroeconómicas de estado. Segundo, en relación a la literatura macroeconómica, las decisiones de cartera son derivadas sin asumir mercados de activos completos, preferencias separables o retornos constantes a escala en la producción.

Otros métodos de perturbación extienden técnicas de solución basadas en linearizaciones para permiten términos de segundo y más alto orden en las

[11]Un análisis detallado de este modelo está provisto en un documento de Evans y Hnatkovska (2005), "*International Capital Flows, Returns and World Financial Integration*".

aproximaciones de las funciones de política. Desafortunadamente, esos métodos solo pueden ser usados en aplicaciones que omiten una característica clave de los modelos con elección de cartera: la heteroscedasticidad condicional del vector de estado que captura las variaciones temporales naturales del conjunto de oportunidades de inversión. Existen métodos que también son incapaces de adoptar las dinámicas no estacionarias que surgen endógenamente cuando los mercados son incompletos.

El método expuesto por Evans y Hnatkovska (2005) puede ser aplicado para resolver modelos con preferencias más complejas, costos de ajuste de capital, o restricciones de cartera. Solo se requiere que las condiciones de equilibrio puedan ser expresadas en una forma log-lineal.

2.2. Modelos diferenciables de equilibrio general con externalidades

Para estudios que muestran la existencia de equilibrio general en economías con externalidades, se considera el trabajo realizado por Del Mercato (2004), el marco es una economía de intercambio puro con externalidades, en la cual la externalidad afecta a las familias y está dada por las acciones de los otros agentes y las dotaciones iniciales que posea la familia. Partiendo de argumentos de diferenciabilidad topológica y condiciones restrictivas muestra la existencia del equilibrio, y describe el equilibrio en términos de las condiciones de primer orden y las condiciones de equilibrio de los mercados. Por medio de un "*Test Economy*" introducen el concepto del optimo paretiano.

Para dar respuesta al trabajo propuesto, Del Mercato (2004) es el punto de partida para la economía de consumo hipotética en la cual se desea mostrar la existencia de un equilibrio general y la Pareto optimalidad. En Del Mercato, (2004) el conjunto de consumo y las preferencias de cada familia dependen de sus dotaciones iniciales y las elecciones de las otras familias. Bajo condiciones diferenciables y restringidas, muestran que para toda economía existe un equilibrio competitivo con precios y consumos estrictamente positivos. La aproximación realizada se basa en argumentos de homotopía en topología diferencial, para describir los equilibrios en las condiciones de primer orden y las condiciones de equilibrio del mercado. La externalidad está dada por las acciones de los otros agentes y las dotaciones iniciales[12].

Del Mercato (2004) considera una economía de intercambio puro, en el que los precios, las dotaciones iniciales y el consumo de los otros agentes se incorporan en las decisiones de los agentes. De modo que, los niveles de riqueza afectan parcialmente las elecciones en la cantidad, y la calidad de bienes, o la disponibilidad en los mercados de algunos bienes. Los supuestos[13] sobre la función de posibilidades, diferenciabilidad y convexidad son estándar, también se supone que con las dotaciones iniciales los hogares sobreviven en el tiempo.

El consumo posible de un hogar en el trabajo de Del Mercato (2004) depende de sus dotaciones iniciales y las elecciones de consumo de los otros hogares, para ello denotan una función de posibilidades. La externalidad, que afecta el consumo de la economía, es un conjunto cerrado y convexo. Dada la externalidad el conjunto de consumo de un hogar es no vacio en la intersección con el conjunto presupuestario (condición de supervivencia), el conjunto de consumo es convexo, existe la posibilidad de que estrictamente cada hogar localmente incremente su utilidad, además se tiene en cuenta los supuestos de no satisfacción local (para la existencia de equilibrios) y deseabilidad global (el equilibrio permanece en un conjunto compacto y garantiza que los precios sean estrictamente positivos). Se propone la existencia de una función continua en cada hogar con el fin de utilizar una homotopía continua para mostrar la existencia del equilibrio. De este modo se llega a que, el equilibrio competitivo es un estado en el cual el consumo agregado es igual al total de los recursos asociados con la economía (*Market Claering Condition*), en el que el consumo satisface las condiciones de vaciado del mercado, el vector de precios y las elecciones de consumo de los otros hogares correspondiente a ese equilibrio.

---

[12]Enfoque de Laffont y Laroque (1972) en el que la externalidad se origina y está en función de las elecciones de los agentes, afectando individualmente los conjuntos de consumo, preferencias de consumo y la tecnología de producción, véase en Del Mercato (2004).

[13]Las preferencias de los hogares son descritas por funciones de utilidad, cada hogar posee una función de posibilidades. La función de utilidad es continua, diferencialmente estrictamente creciente, diferencialmente estrictamente cuasi-cóncava. En los hogares: la función de posibilidades es continua, el conjunto de consumo es convexo, existe una intersección no vacía con el conjunto presupuestario, no saciabilidad y deseabilidad global.

Con dos funciones diferenciables (condición para realizar una homotopía), se procede a incorporar la homotopía para validar los teoremas y las proposiciones realizadas para el equilibrio general.

En otro sentido, Cornet y Topuzu (2005) proveen la existencia de equilibrios en un modelo con *mapeo* general de la externalidad y entonces deducir un resultado de existencia de equilibrio en el modelo de coaliciones de referencia para el global y la media dependiente. Considera una economía de intercambio que toma en cuenta dos posibles efectos externos en las preferencias del consumidor: dependencia sobre los precios y dependencia sobre el consumo de otros agentes; y un caso particular de coalición de las externalidades de referencia, en el que la preferencia de cada agente está influenciada por precios y por el global, y el caso en que el consumo medio de los agentes tiene un número finito (dado exógenamente) de coaliciones de referencia asociado con un agente cualquiera.

Para la existencia de equilibrios en economías con *Measure Space of Agents* y externalidades en los precios Cornet y Topuzu referencian a Greenberg et al. (1979), quien utiliza preferencia ordenadas y usa un enfoque de teórico de juegos, que aprovecha la idea original de Debreu de introducir a un jugador que es fijador de precios.

Cornet y Topuzu toma en cuenta “algunos efectos externos finitos“ en el que el espacio de externalidades es asumido como un subconjunto de espacio Euclidiano de dimensión finita, esto origina una restricción explicita en la pareja de precios y de distribución del consumo (integrable) que puede influenciar la preferencia de los agentes vía mapeo de la externalidad.

Los primeros resultados de la existencia en Cornet y Topuzu están expuestos bajo un supuesto de convexidad fuerte en las preferencias. Cuando se considera el supuesto de convexidad débil para poder abarcar los resultados de existencia de Aumann (1966), Schmeidler (1969), y Hildenbrand (1970) en economías de intercambio. Así que, se extienden los resultados clásicos de Aummann (1966), Schmeidler (1969) y Hildenbrand (1970), y resultados previos de Greenberg et al. (1979) para la dependencia de las preferencias en los precios. En el modelo de coalición de referencia, los resultados abarcan los resultados de Schmeidler (1973) en el caso de referencias de coalición constantes (cuando la coalición no depende del agente a y del sistema de precios). También generaliza el resultado de existencia de Noguchi (2005) que considera, para cada agente a, una coalición particular de referencia, que consta de todos los agentes quienes poseen un rango de ingreso seguro asociado al agente a.

Por último, Cornet y Topuzu proveen el Teorema resultado de existencia, bajo un supuesto adicional, en que las correspondencias del conjunto de consumo son integralmente limitados.

Por otra parte, Bonnisseau y Del Mercato (2009) consideran un modelo general, de economía de intercambio puro con externalidades en el consumo, en el que los hogares pueden tener conjuntos de consumo diferente y cada conjunto de consumo es descrito por una función de posibilidades[14]. La utilidad y las funciones de posibilidades dependen de los consumos de todos los hogares.

Bonnisseau y Del Mercato parten de una economía regular en el que el número de equilibrios es finito y la dependencia de cada equilibrio en los parámetros describe la economía. Allí los equilibrios son localmente continuos o diferenciables y, por lo tanto, se puede realizar análisis de estática comparativa. Cabe mencionar que, la comparación del bienestar en equilibrio, antes y después de mejoras políticas del tipo Pareto, es posible sólo en una vecindad de una economía regular y además se debe tener en cuenta que solo se pueden implementar políticas óptimas en el sentido de Pareto cuando estas economías son genéricas.

Los autores proporcionan un ejemplo[15] de una economía de intercambio con externalidades sin restricciones de consumo[16] donde todas las dotaciones son singulares y da lugar a conjuntos de equilibrios infinitos. De modo que se realizan algunas restricciones en las características de los agentes para obtener

---

[14]Para modelar conjuntos de posibilidades de consumo diferentes del conjunto de consumo positivo, se puede revisar: Smile (1974), "*Global analysis and economies IV; Finiteness and stability of equilibriawith general consumption sets and production*", donde cada conjunto de consumo es descrito por una desigualdad en una función diferenciable llamada función de posibilidades.

[15]En el ejemplo, las externalidades no afectan solamente los niveles de utilidad sino que también a la tasa marginal de sustitución.

[16]En ausencia de restricciones de consumo, las economías son regulares para casi todas las dotaciones iniciales.

regularidad genérica[17]. Consideran desplazamientos de los límites de los conjuntos de consumo, que son, simples perturbaciones de las funciones de posibilidad, porque las externalidades en el consumo pueden llevar a una falta de continuidad en los precios de equilibrio y de esta manera se corrige la falta de continuidad. El trabajo de Bonnisseau y Del Mercato da una aproximación a que las regularidades genéricas son validas con efectos externos que afectan la tasa marginal de sustitución y sus demandas individuales, siempre que sus efectos no sean tan fuertes.

Considerando conjuntos de producción no convexos y espacios de bienes de dimensión infinita, Fuentes (2009) prueba la existencia del equilibrio general en economías con externalidades. En el que la externalidad se define por el hecho que la producción de cada firma depende de la producción de las otras firmas, como también del consumo de los hogares. Adicionalmente estudian casos particulares; cuando las economías tienen un espacio de bienes de dimensión finita, cuando no hay externalidades o estas son fijas, y cuando el conjunto de producción es convexo.

Fuentes emplea una serie de supuestos sobre los consumidores (el consumo es una correspondencia cerrada, convexa y contiene el cero. No hay satisfacción local, las preferencias son continuas, el bienestar global es positivo y el ingreso de cada individuo es positivo), sobre los productores (la producción es una correspondencia cerrada, libremente dispuesta, la producción es débilmente eficiente, una versión débil de la imposibilidad de producción en el que la producción no se puede aumentar sin considerar la externalidad y los insumos inputs necesarios) y de la economía en general (que garantiza: *Bounded Loss*, supervivencia débil, producción en el equilibrio, producción de equilibrio alcanzable) para proponer los teoremas y lemas productos de la existencia del equilibrio general en la economía descrita en presencia de externalidades. De allí que se desarrolla un subespacio en el que se satisface el supuesto de no saciabilidad local y el supuesto de supervivencia débil, también bajo los supuestos planteados existe un subespacio en el que la economía está en equilibrio, y la

[17] Para tener regularidad genérica se asume que los efectos externos del consumo de otros agentes sobre las funciones de utilidad y posibilidad, son dominados por los efectos directos del propio consumo individual. En otras palabras se define una función de exceso de demanda agregada que dependa únicamente de los precios y de las dotaciones

economía tiene un equilibrio si los supuestos del consumidor, productor, limite en las dotaciones, *Bounded Loss*, supervivencia débil y los supuestos de la conducta del productor, son satisfechos.

Más recientemente Del Mercato y Platino (2010) Plantean una economía compuesta por un número finito de bienes, de firmas y de familias con funciones diferenciables. Allí prueban la existencia de un conjunto de equilibrio competitivo, con externalidades en el consumo y la producción. El modelo permite hacer análisis de estática comparativa, y permite evaluar mejoras de política del tipo Pareto desde un punto de vista diferenciable. Garantiza que con las dotaciones iniciales los individuos viven en el equilibrio, para ello toman el trabajo seminal de Smale (1974), y para su demostración emplean aproximaciones homotópicas y describen el equilibrio en términos de las condiciones de primer orden y las condiciones de vaciado del mercado.

3. MARCO TEÓRICO

A partir del trabajo realizado por Del Mercato (2004) se desarrolla el presente marco teórico, el cual es un ligero resumen del trabajo de Del Mercato con algunos componentes adicionales y algunas extensiones. En primer lugar, se describen las características principales en una economía de intercambio y la definición de equilibrio, es decir, se muestran los supuestos y el marco en el cual la economía toma lugar. En segundo lugar, se describen las propiedades de la función de demanda de los hogares y se hace una representación paramétrica de la solución al problema de maximización de los hogares. Posteriormente, se caracteriza el equilibrio, las condiciones de primer orden del problema de los hogares y las condiciones de vaciado del mercado. Por último, se extiende el concepto de homotopía y los resultados del trabajo realizado por Del Mercato (2004).

3.1. El modelo

Los hogares, en ocasiones llamados individuos o consumidores, transan bienes en el mercado para mejorar su bienestar, de modo que los bienes cumplen las siguientes características:

- Hay un número finito de bienes homogéneos $C < \infty$. Un bien es denotado por el subíndice $c \in \{1, \dots, C\}$. El espacio de los bienes es $\mathbb{R}^C_{++}$.
- Cada bien es perfectamente divisible. Lo que también es, se puede obtener cualquier cantidad real del bien.
- Los bienes están únicamente disponibles en cantidades no negativas.
- Hay un número finito de hogares $H < \infty$. En donde se describe un hogar $h \in \mathcal{H} := \{1, \dots, H\}$ con preferencias descritas por una función de utilidad.
- Para cada $h \in \mathcal{H}$, el consumo de los otros hogares y las dotaciones iniciales de h influyen en las preferencias y las posibilidades del hogar h

- x_h^c es el consumo del bien c realizado por el hogar h; $x \coloneqq (x_h)_{h\in\mathcal{H}} \in \mathbb{R}_{-+}^{CH}$. X_h es el espacio de los bienes, el cual es convexo, acotado por abajo e ilimitado.
- e_h^c es la dotación del bien c en propiedad del hogar h; $e_h \coloneqq (e_h)_{h\in\mathcal{H}} \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$
- Cada hogar h tiene unas preferencias descritas por una función de utilidad

Cada hogar elige un vector de bienes, estas elecciones están basadas en sus preferencias sobre un subconjunto del espacio de bienes, llamada su conjunto de consumo. Sus elecciones son limitadas por el entorno económico por un subconjunto del conjunto de consumo llamado conjunto presupuestario, Villanacci, Carosi, Benevieri, y Battinelli (2002, p. 209).

Las relaciones de preferencia de los hogares tienen las siguientes propiedades:

- Las preferencias son completas; cada hogar puede comparar cada par de bienes posibles. La completitud también implica que los individuos conocen completamente las características de cada elemento del conjunto de elección.
- Las preferencias son transitivas; existe un principio de ordenación en las preferencias que puede asociarse a la racionalidad de los individuos.
- Las preferencias son continuas; las preferencias del consumidor no exhibe saltos, es decir los consumidores prefieren cada elemento en secuencia, Villanacci, Carosi, Benevieri, y Battinelli (2002, p. 211).

Teorema 1: Asumiendo que las preferencias definidas en un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^C$ son completas, transitivas, y continuas. Entonces, existe una función de utilidad u que representa las preferencias. Villanacci, Carosi, Benevieri, y Battinelli, (2002, p. 212)

Cada hogar esta caracterizado por una dotación inicial de bienes, e_h[18], una función de posibilidades, χ_h, y una función de utilidad, u_h.[19]

---

[18]Se asume que las dotaciones de cada hogar son positivas para todos los bienes, y cada hogar posee una fracción de un bien cualquiera.

[19]Diferentes factores como precios, dotaciones iniciales y elecciones de consumo de los otros agentes se incorporan en la conducta del consumidor, de modo que el conjunto de consumo y la función de utilidad de cada hogar dependen de sus dotaciones iniciales y de las elecciones de consumos de los otros hogares

$u_h: \mathbb{R}^C_{++} \times \mathbb{R}^{C(H-1)}_{+} \times \mathbb{R}^C_{++} \to \mathbb{R}$

Dado $(x_h, x_{\backslash h}, e_h) \in \mathbb{R}^C_{++} \times \mathbb{R}^{C(H-1)}_{++} \times \mathbb{R}^C_{++}$,

$u_h(x_h, x_{\backslash h}, e_h) \in \mathbb{R}$

donde:

$x_{\backslash h}$: es el consumo realizado por los hogares diferentes a h

Es la utilidad del hogar h asociado con $\left(x_h, x_{\backslash h}, e_h\right); u: (u_h)_{h \in \mathcal{H}}$

Dado $e_h \in \mathbb{R}^C_{-+}$ y $x_{\backslash h} \in \mathbb{R}^{C(H-1)}_{++}$, el conjunto de consumo del hogar h es descrito por:

$X_h\left(x_{\backslash h}, e_h\right) = \left\{x_h \in \mathbb{R}^C_{++}: \chi_h(x_h, x_{\backslash h}, e_h) \geq 0\right\}$

Donde χ_h es una función,

$\chi_h: \mathbb{R}^C_{++} \times \mathbb{R}^{C(H-1)}_{++} \times \mathbb{R}^C_{++} \to \mathbb{R}$

Se dice que la función de posibilidades del hogar h es; $\chi \coloneqq (\chi_h)_{h \in \mathcal{H}}$

Cada hogar debe elegir un plan de consumo en su conjunto de consumo, entre el conjunto de todos los planes de consumo posibles para él. Esta posibilidad depende de sus dotaciones iniciales y de las elecciones de consumo de los otros hogares, por tanto χ_h es llamada la función de posibilidades.

El consumo de un bien afecta las posibilidades de consumo de otros bienes independientemente de las restricciones de riqueza. La elección de los hogares afecta y limita las decisiones en cualquier lugar y en toda situación. En general, las dotaciones iniciales se pueden tomar como un indicador de la clase social, de modo que solo afecta las posibilidades de consumo pero no las preferencias[20].

Para que los bienes sean transados es necesario que a cada bien le corresponda un precio, con el cual puede transarse en el mercado, así que un precio puede

[20]El conjunto de todos los planes de consumo posibles es determinado por la función de posibilidades.

describirse como: $\tilde{p}^c$, de forma que $\tilde{p}^c$ es el precio de una unidad del bien $c; \tilde{p} \coloneqq (\tilde{p}^1, \dots, \tilde{p}^c, \dots, \tilde{p}^C) \in \mathbb{R}^C_{++}$

Sin perder generalidad w es el vector que describe el consumo del hogar h

Dado $w = (w^1, \dots, w^c, \dots, w^C) \in \mathbb{R}^C$
$w^{\setminus} = (w^1, \dots, w^c, \dots, w^{C-1}) \in \mathbb{R}^{C-1}$

Se hacen los siguientes supuestos en la función de utilidad y en la función de posibilidades.

Supuestos 1. Para cada $h \in \mathcal{H}$

1.1.a. Para cada $(z, v) \in \mathbb{R}^{C(H-1)}_{++} \times \mathbb{R}^C_{-+}$, la función $u_h(\cdot, z, v): w \in \mathbb{R}^C_{++} \to u_h(w, z, v) \in \mathbb{R}\ es\ C^1$;

1.1.b. Para cada $v \in \mathbb{R}^C_{++}$, la función $\chi_h(\cdot,\cdot, v)$ es continua;

1.1.c. Para cada $v \in \mathbb{R}^C_{++}$, la restricción de $D_w u_h(\cdot,\cdot, v)$ a $\mathbb{R}^C_{-+} \times \mathbb{R}^{C(H-1)}_{-+}$es continua;

1.2. Para cada $(z, v) \in \mathbb{R}^{C(H-1)}_{++} \times \mathbb{R}^C_{-+}$, la función $u_h(\cdot, z, v)$ es estrictamente creciente;

1.3. Para cada $(z, v) \in \mathbb{R}^{C(H-1)}_{++} \times \mathbb{R}^C_{-+}$, la función $u_h(\cdot, z, v)$ es cuasi-cóncava;

1.4. Para cada $(z, v) \in \mathbb{R}^{C(H-1)}_{-} \times \mathbb{R}^C_{++}$, y para cada $u \in \mathbb{R}$, $cl_{\mathbb{R}^C}\{w \in$
$\mathbb{R}{+}{+}C{:}uhw{,}z{,}v{\geq}u{\subseteq}\mathbb{R}{-}{+}C$

Los Supuestos **(1)** se especifican por conveniencia matemática, en otras palabras se requieren para que los conjuntos tengan formas "suaves[21]" o bien comportadas tanto en el consumo como en la utilidad del individuo. Esto es estándar en el modelo de equilibrio general, Villanacci, Carosi, Benevieri, y Battinelli (2002)

Supuestos 2.[22] Para todo $h \in \mathcal{H}$

[21]En ocasiones se asocia este término a una función infinitamente diferenciable.

[22]Los Supuestos **(2.1)** y **(2.2)** en la función de posibilidades, sobre diferenciabilidad y convexidad, son totalmente estándar. El Supuesto **(2.3)**, corresponde al supuesto de supervivencia (para cada hogar, las dotaciones iniciales están en un punto interior de su conjunto de consumo). Los bienes son deseables, Supuesto **(2.5)**

2.1.a. Para cada $(z,v) \in \mathbb{R}_{++}^{C(H-1)} \times \mathbb{R}_{-+}^{C}$, la función

$\chi_h(\cdot,z,v): w \in \mathbb{R}_{++}^{C} \to \chi_h(w,z,v) \in \mathbb{R}$ es C^1;

2.1.b. La función χ_h es continua;

2.1.c. La restricción de $D_w\chi_h\ a\ \mathbb{R}_{++}^{C} \times \mathbb{R}_{++}^{C(H-1)} \times \mathbb{R}_{++}^{C}$ es continua;

2.2. Convexidad del conjunto de consumo;

2.3. Intersección no vacía con el conjunto presupuestario;

2.4. No saciación[23]

2.5. Deseabilidad global[24]

El Supuesto **(2.1 a, b y c)** y **(2.2)** mantiene el marco general de convexidad y cierre del conjunto de consumo, dada la externalidad. Del Supuesto **(2.3)**, dada la externalidad $(x_{\setminus h}, e_h) \in \mathbb{R}_{++}^{C(H-1)} \times \mathbb{R}_{-+}^{C}$, el conjunto de consumo $X_h(x_{\setminus h}, e_h)$ del hogar h tiene una intersección no vacía con el conjunto presupuestario[25]. El Supuesto **(2.4)** permite que el equilibrio competitivo exista y, que además, se cumpla la ley de Walras, tal que el hogar pueda incrementar su utilidad bajo cualquier consumo y asegurar que la solución al problema del consumidor no sea un punto interior de su restricción presupuestario.

Ley de Walras: $p \cdot x = w$ para todo $x \in x(p,w)$, Mas-Colell, Whinston y Green (1995, p. 52)

Donde: $x(p,w)$, es la demanda Walrasiana; y (p,w), es el precio de los bienes y la riqueza de los individuos respectivamente. La ley de Walras se alcanza mediante el supuesto de no satisfacción local, para alcanzar una cesta de consumo óptima y cerrada en el límite de la función de posibilidades.

Para tener precios positivos en equilibrio, los bienes deben ser deseables. En el Supuestos **(2.5)** se provee una condición ligeramente débil de la deseabilidad

---

[23]La condición permite, en la Proposición **(3)**, que el multiplicador de Lagrange λ_h estrictamente positivo asociado a la restricción presupuestaria en el problema de maximización de la utilidad del hogar h, como también que el Lema **(3)** tenga convergencia a variables estrictamente positivas.

[24]Una extensión de estos supuestos puede verse en: Del Mercato (2004, pp. 8-9)

[25]Hay una condición de supervivencia de cada hogar incluso si en las dotaciones no se asume que estas pertenezcan al conjunto de consumo.

global, cuando todos los consumos están en el límite de los conjuntos de consumo.

En resumen, el hogar h toma como dados los precios, las dotaciones iniciales y el consumo de los otros hogares, entonces cada hogar maximiza su función de utilidad en su conjunto de consumo y su conjunto presupuestario. La posibilidad de que cada hogar localmente incremente estrictamente su utilidad es crucial para encontrar la existencia del equilibrio.

Los conjuntos de funciones de utilidad y de funciones de posibilidades que satisfacen los Supuestos **(1)** y **(2)** son denotados por $\mathcal{U}$ y $\mathcal{X}$, respectivamente. Además, $\mathcal{U}^H \coloneqq \prod_{h\in\mathcal{H}} \mathcal{U}$ y $\mathcal{X}^H \coloneqq \prod_{h\in\mathcal{H}} \mathcal{X}$.

Definición (1) Una economía está completamente descrita por un elemento

$$\mathcal{E} \coloneqq (e, u, \chi) \in \mathbb{R}_{-+}^{CH} \times \mathcal{U}^H \times \mathcal{X}^H$$

Para la construcción de una homotopía continua se tiene:

Proposición (1) Para cada $h \in \mathcal{H}$, allí existe una función continua:

$\tilde{x}_h\colon (z, v) \in \mathbb{R}_{-}^{C(H-1)} \times \mathbb{R}_{-+}^{C} \to \tilde{x}_h(z, v) \in \mathbb{R}_{++}^{C}$ tal que para cada $(z, v) \in \mathbb{R}_{+}^{C(H-1)} \times \mathbb{R}_{++}^{C}$,

$$\chi_h(\tilde{x}_h(z, v), z, v) > 0 \;\; y \;\; \tilde{x}_h(z, v) \ll v.$$

3.2. Concepto de equilibrio

Definición de Equilibrio Competitivo

El problema de maximización del hogar h es definido: Para cualquier $\mathcal{E}$ dada, $x_{\backslash h} \in \mathbb{R}_{++}^{C(H-1)}$ y $\tilde{p} \in \mathbb{R}_{++}^{C}$, se define el problema ($\tilde{P}h$: el problema para la familia h) de maximización del consumidor como sigue:

$$\left(\tilde{P}h\right) max_{x_h \in \mathbb{R}_{++}^{C}} u_h\left(x_h, x_{\backslash h}, e_h\right) \qquad \textbf{(A)}$$

$$\text{sujeto a: } \chi_h\left(x_h, x_{\backslash h}, e_h\right) \geq 0$$

$$\tilde{p}x_h \leq \tilde{p}e_h$$

De manera que, x satisface las condiciones de vaciado del mercado si:

$$\sum_{h=1}^{H} x_h = \sum_{h=1}^{H} e_h \qquad \textbf{(B)}$$

La ecuación **(B)** representa que el consumo agregado es igual a todos los recursos asociados a e.

Definición (2): $(x^*, \tilde{p}^*) \in \mathbb{R}_{++}^{CH} \times \mathbb{R}_{-+}^{C}$ es un equilibrio competitivo para $\mathcal{E}$ si cumple las siguientes condiciones:

- Para todo $h = 1, \dots, H, x_h^*$ resuelve el problema **(A)** en $\left(x_{\setminus h}^*, \tilde{p}^*\right)$;
- x^* satisface las condiciones de vaciado del mercado **(B)**

Normalizando precios tenemos que:

$p^c \coloneqq \frac{\tilde{p}^c}{\tilde{p}^C},\ p^{\setminus} \coloneqq (p^1, \dots, p^{C-1}) \in \mathbb{R}_{++}^{C-1}$ y $p \coloneqq (p^{\setminus}, 1) \in \mathbb{R}_{-+}^{C}$.

Los precios describen las relaciones de intercambio entre bienes, de esta manera $\frac{\tilde{p}^c}{\tilde{p}^C}$ describe la cantidad del bien C que puede ser intercambiada por el bien c. Bajo el marco establecido se puede establecer que el precio del bien C es igual a 1 para que p^c indique la equivalencia de intercambio, en el mercado, entre las cantidades del bien c respecto al bien C.

Dada la normalización de precios se puede reescribir el problema **(A)** como:

$$(\tilde{P}h)\ max_{x_h \in \mathbb{R}_{++}^{C}} u_h\left(x_h, x_{\setminus h}, e_h\right) \qquad \textbf{(C)}$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \chi_h\left(x_h, x_{\setminus h}, e_h\right) \geq 0$$

$$-p(x_h - e_h) \geq 0$$

Observación 1: Después de la normalización de precios, $\left(x^*, \tilde{p}^{*\setminus}\right) \in \mathbb{R}_{++}^{CH} \times \mathbb{R}_{-+}^{C-1}$ es un equilibrio competitivo para $\mathcal{E}$ si:

- Para todo $h = 1, \dots, H, x_h^*$ resuelve el problema de **(C)** en $\left(x_{\setminus h}^*, p^{*\setminus}\right)$;
- x^* satisface las condiciones de vaciado del mercado **(B)**

3.3. Caracterización diferencial de la solución al problema de maximización del hogar

Las siguientes proposiciones muestran que la maximización del problema del hogar h tiene única solución. Se caracterizan las soluciones en términos de las condiciones de primer orden necesarias y suficientes (ver Proposición **(3)**).

Proposición 2: Para cada economía $\mathcal{E}, x_{\setminus h} \in \mathbb{R}_{++}^{C(H-1)}$ y $p^{\setminus} \in \mathbb{R}_{-+}^{C-1}$, existe una solución al problema **(C)** y es única.

Para mostrar la existencia de una solución se aplica el Teorema de Weierstrass[26], entonces se necesita tener un conjunto de restricciones compacto. Partiendo de las preferencias del hogar y de la existencia de una función continua denotada por $\tilde{x}_h$ satisface:
$\chi_h\big(\tilde{x}_h(x_{\setminus h}, e_h), x_{\setminus h}, e_h\big) > 0$ y $\tilde{x}_h(x_{\setminus h}, e_h) \ll e_h$

Se considera el siguiente problema:

$$(\tilde{P}h)\ max_{x_h \in \mathbb{R}_{++}^{C}} u_h\big(x_h, x_{\setminus h}, e_h\big) \qquad \textbf{(D)}$$

Sujeto a: $\chi_h\big(x_h, x_{\setminus h}, e_h\big) \geq 0$

$$-p(x_h - e_h) \geq 0$$

$$u_h\big(x_h, x_{\setminus h}, e_h\big) \geq u_h\big(\tilde{x}_h, x_{\setminus h}, e_h\big)$$

Se denota con $\mathcal{C}$ al conjunto de restricciones asociado al problema **(D)**,

$$\mathcal{C} \coloneqq A \cap M \subseteq \mathbb{R}_{++}^{C}$$

donde $A \coloneqq \{x_h \in \mathbb{R}_{++}^{C}: -p(x_h - e_h) \geq 0 \text{ y } \chi_h\big(x_h, x_{\setminus h}, e_h\big) \geq 0\}$,
y, $M = \{x_h \in \mathbb{R}_{++}^{C}: u_h\big(x_h, x_{\setminus h}, e_h\big) \geq u_h\big(\tilde{x}_h, x_{\setminus h}, e_h\big)\}$

Siendo $\mathcal{C}$ compacto, y con $u_h\big(x_h, x_{\setminus h}, e_h\big)$ continua, como una aplicación del teorema de Weierstrass, allí existe una solución x_h^* al problema **(D)**. Entonces x_h^* es una solución al problema **(C)**. Esta solución es única desde que $u_h\big(x_h, x_{\setminus h}, e_h\big)$ sea estrictamente cuasi-cóncava, $\chi_h\big(x_h, x_{\setminus h}, e_h\big)$ sea cóncava, y el conjunto presupuestario sea convexo.

[26]**Teorema Weierstrass:** Una función continua definida en un conjunto compacto no vacío tiene por lo menos un máximo y un mínimo.

Proposición 3: Para cada economía $\mathcal{E}, x_{\setminus h} \in \mathbb{R}_{++}^{C(H-1)}$ y $p^{\setminus} \in \mathbb{R}_{-+}^{C-1}, x_h^*$ es la solución al problema **(C)** si, y sólo si, existe $(\lambda_h^*, \mu_h^*) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$ tal que $(x_h^*, \lambda_h^*, \mu_h^*)$ es la única solución al sistema.

	#Ecuación	
(h.1)	*C*	$D_{x_h}u_h(x_h, x_{\setminus h}, e_h) - \lambda_h p + \mu_h D_{x_h}\chi_h(x_h, x_{\setminus h}, e_h) = 0$
(h.2)	1	$-p(x_h - e_h) = 0$
(h.3)	1	$min\{\mu_h, \chi_h(x_h, x_{\setminus h}, e_h))\} = 0$

$en\ (\mathcal{E}, x_{\setminus h}, p^{\setminus})$.

Para la prueba de la Proposición **(3)** se deben satisfacer las condiciones necesarias y suficientes de Kuhn-Tucker[27], de modo que la función Lagrangiana es:

$$\mathcal{L}(x_h, \lambda_h, \mu_h) = u_h(x_h, x_{\setminus h}, e_h) + \lambda_h p + \mu_h[-p(x_h - e_h)] + \mu_h \chi_h(x_h, x_{\setminus h}, e_h)$$

Y las condiciones de primer orden asociadas son:

	#Ecuación	
(h.1)	*C*	$D_{x_h}u_h(x_h, x_{\setminus h}, e_h) - \lambda_h p + \mu_h D_{x_h}\chi_h(x_h, x_{\setminus h}, e_h) = 0$
(h.2)	1	$min\{\lambda_h, -p(x_h - e_h)\} = 0$
(h.3)	1	$min\{\mu_h, \chi_h(x_h, x_{\setminus h}, e_h)\} = 0$

Si se define a $g^1(x_h) = -p(x_h - e_h)$ y $g^2(x_h) = \chi_h(x_h, x_{\setminus h}, e_h)$, entonces las condiciones de Kunh-Tucker suficientes son satisfechas, desde que $u_h(x_h, x_{\setminus h}, e_h)$ sea pseudo-cóncava, y g^1 y g^2sean cuasi-cóncavas.

Existencia*:* Las condiciones de Kuhn-Tucker son satisfechas, desde que g^1 y g^2 sean pseudo-cóncavas, y hay $\tilde{x}_h = \tilde{x}_h(x_{\setminus h}, e_h) \in \mathbb{R}_{-+}^{C}$ dada la Proposición **(1)**, tal que $g^1(\tilde{x}_h) > 0$ y que $g^2(\tilde{x}_h) > 0$

Por tanto, si x_h^* es la solución al problema **(C)** en $(\mathcal{E}, x_{\setminus h}, p^{\setminus})$, entonces existe $(\lambda_h^*, \mu_h^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $(x_h^*, \lambda_h^*, \mu_h^*)$ es una solución al sistema **(F)**.

[27]Para una ampliación de las condiciones de Kuhn-Tucker necesarias y suficientes véase en: Villanacci, Carosi, Benevieri y Battinelli (2002, p. 18)

El hecho de que $\lambda_h^* > 0$ viene de la ecuación **(h.1)** y **(h.3)** en el sistema **(F)**, del Supuesto **(2.4)** y del Supuesto **(1.2)**.

Unicidad: Suponga por otro lado que hay (λ_h^*, μ_h^*) y (λ_h', μ_h') en $\mathbb{R}_{-+} \times \mathbb{R}$, con $(\lambda_h^*, \mu_h^*) \neq (\lambda_h', \mu_h')$ tal que $(x_h^*, \lambda_h^*, \mu_h^*)$ y $(x_h^*, \lambda_h', \mu_h')$ son soluciones al sistema **(E)**. De **(h.1)** en el sistema **(E)**, se tiene que;

$D_{x_h} u_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h) = \lambda_h^* p - \mu_h^* D_{x_h} \chi_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h)$
y, $D_{x_h} u_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h) = \lambda_h' p - \mu_h' D_{x_h} \chi_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h)$

Por tanto, se tiene:

$$(\lambda_h^* - \lambda_h')p - (\mu_h^* - \mu_h') D_{x_h} \chi_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h) = 0 \qquad \textbf{(G)}$$

Observe que, si $\lambda_h^* = \lambda_h'$ y $\chi_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h) > 0$, entonces de **(h.3)** en **(E)** se tiene $\mu_h^* = \mu_h' = 0$; si $\lambda_h^* = \lambda_h'$ y $\chi_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h) = 0$ se tiene que $\mu_h^* = \mu_h'$ desde que $D_{x_h} \chi_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h) \neq 0$ (ver Supuesto **(2.4)**); y si $\mu_h^* = \mu_h'$ se tiene que $\lambda_h^* = \lambda_h'$ desde que $p \gg 0$. Por tanto,

$$(\lambda_h^*, \mu_h^*) \neq (\lambda_h', \mu_h') \Longrightarrow \lambda_h^* \neq \lambda_h' \; y \; \mu_h^* \neq \mu_h'$$

Se observa que $\mu_h^* \neq \mu_h'$ implica que $\chi_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h) = 0$. Por otra parte, de **(h.3)** en **(E)** se tiene que $\mu_h^* = \mu_h' = 0$. Ahora se define a $\beta_h := \frac{\mu_h^* - \mu_h'}{\lambda_h^* - \lambda_h'} \neq 0$. De **(G)** se tiene que:

$$p = \beta_h D_{x_h} \chi_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h)$$

De $\chi_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h) = 0$ se tiene que $D_{x_h^{c(x_{\setminus h}, e_h)}} \chi_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h) \geq 0$ para algún bien $\bar{c} := c(x_{\setminus h}, e_h)$ (ver Supuesto **(2.4)**), entonces $\beta_h > 0$ desde que $p^{\bar{c}} > 0$. Por tanto, $p = \beta_h D_{x_h} \chi_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h)$ con $\beta_h > 0$, que es el problema:[28]

$$p x_h^* = min_{x_h \in \mathbb{R}_{++}^C} p x_h \qquad \textbf{(H)}$$
$$\text{Sujeto a: } \chi_h(x_h^*, x_{\setminus h}, e_h) \geq 0$$

[28]De las condiciones de Kuhn-Tucker necesarias y suficientes y del hecho que $-min_{a \in A} pa = max_{a \in A} pa$

Ahora, de **(h.2)** en **(E)** se sabe que $px_h^* = pe_h$, y de la Proposición **(1)**, $\tilde{x}_h(x_{\backslash h}, e_h) \in \mathbb{R}_{-+}^C$ satisface,

$$\chi_h\big(\tilde{x}_h(x_{\backslash h}, e_h), x_{\backslash h}, e_h\big) > 0 \ y \ \tilde{x}_h(x_{\backslash h}, e_h) \ll e_h$$

Entonces, $p\tilde{x}_h\big(x_{\backslash h}, e_h\big) < pe_h = px_h^*$ contradice el problema **(H).** Por tanto, si x_h^* es la solución al problema **(C)**, entonces existe $(\lambda_h^*, \mu_h^*) \in \mathbb{R}_{-+} \times \mathbb{R}$ tal que $(x_h^*, \lambda_h^*, \mu_h^*)$ es la única solución al sistema **(E)**.

4. EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO

Para evitar técnicas complejas se consideran variedades (topológicas) que están incluidos en algún $\mathbb{R}^s$ y, así, tomar ventaja de las propiedades del medio espacial, Mas-Colell (1985, p. 33)

Definición 3: Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^s$ es una variedad n-(dimensional) C^r, si para cada $x \in M$ hay un difeomorfismo[29] $f: U \to \mathbb{R}^s$, $U \subset \mathbb{R}^s$ abierto, que lleva al conjunto abierto $U \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{s-n})$ sobre una vecindad de x en M. Ver Figura 1.

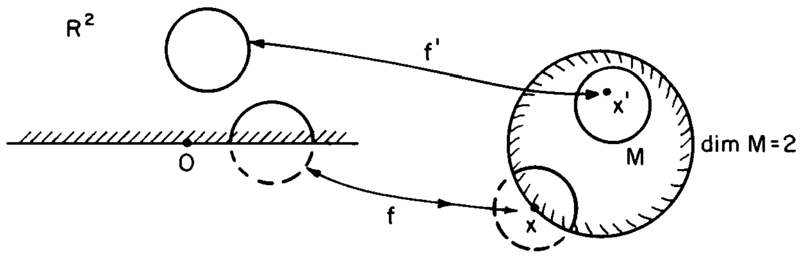

Figura 1: Variedad diferenciable. Fuente: Mas-Colell (1985, p. 33)

Definición 4: Suponga que X, Y son espacios topológicos arbitrarios. Dos funciones $f, f': X \to Y$ son homotópicas si hay una función continua $F: X \times [0,1] \to Y$, llamada una homotopía, tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = f'(x)$ para todo $x \in$

[29]La función $f: X \to Y$ es un homeomorfismo si es una aplicación biyectiva, una a una, y abierta.de manera que, una función de C^r, $f: U \to R^s$ abierta, es un difeomorfismo de C^r, $r \geq 0$, si este es un homeomorfismo con una inversa de C^r. La inversa del difeomorfismo también es diferenciable. Mas-Colell (1985, p. 8, 33)

X, es decir, si f puede ser deformada continuamente en f'. Mas-Colell (1985, p. 45).

Teorema 2: Dado $(u,\chi) \in \mathcal{U}^H \times \mathcal{X}^H$, para cada $e \in \mathbb{R}_{++}$ existe un equilibrio competitivo para $\mathcal{E} = (e,u,\chi) \in \mathbb{R}_{++}^{CH} \times \mathcal{U}^H \times \mathcal{X}^H$ con consumo y precios estrictamente positivos.

4.1. Caracterización diferencial del equilibrio

A partir de ahora, una economía es completamente descrita por un elemento $e \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$, que define también un conjunto de variables endógenas como

$$\Xi \coloneqq (\mathbb{R}_{++}^{C} \times \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R})^H \times \mathbb{R}_{++}^{C-1}$$

Con un elemento genérico

$$\xi \coloneqq \left(x,\lambda,\mu,p^{\setminus}\right) \coloneqq ((x_h,\lambda_h,\mu_h)_{h\in H},p^{\setminus})$$

Definición 5: dado $(u,\chi) \in \mathcal{U}^H \times \mathcal{X}^H$, $\xi \coloneqq \left(x^*,\lambda^*,\mu^*,p^{*\setminus}\right) \in \Xi$ es un Equilibrio Competitivo extendido para una economía $e \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$ si

1. Para todo $h = 1,\dots,H, (x_h^*,\lambda_h^*,\mu_h^*)$ resuelve el Sistema **(E)** en $(e,x_{\setminus h}^*,p^{*\setminus})$;
2. x^* satisface las condiciones de vaciado del mercado **(B)**

Dados $(u,\chi) \in \mathcal{U}^H \times \mathcal{X}^H$, $\xi \coloneqq \left(x^*,\lambda^*,\mu^*,p^{*\setminus}\right) \in \Xi$ es un Equilibrio Competitivo extendido para $e \in \mathbb{R}_{-+}^{CH}$ si, y sólo si:

- Para todo $h = 1,\dots,H, (x_h^*,\lambda_h^*,\mu_h^*)$ resuelve el Sistema **(E)** en $(e,x_{\setminus h}^*,p^{*\setminus})$;
- x^* satisface las siguientes condiciones de vaciado del mercado **(I)**,

$$\textstyle\sum_{h=1}^{H}\left(x_h^{\setminus} - e_h^{\setminus}\right) = 0 \qquad \textbf{(I)}$$

donde $x_h^{\setminus} = (x_h^c)_{c\neq C} \in \mathbb{R}_{++}^{C-1}$ y $e_h^{\setminus} = (e_h^c)_{c\neq C} \in \mathbb{R}_{++}^{C-1}$

Se considera el siguiente sistema:

	#Ecuación	
(h.1)	*C*	$D_{x_h}u_h\left(x_h,x_{\setminus h},e_h\right) - \lambda_h p + \mu_h D_{x_h}\chi_h\left(x_h,x_{\setminus h},e_h\right) = 0$
(h.2)	1	$-p(x_h - e_h) = 0$

(h.3) 1 $min\{\mu_h, \chi_h(x_h, x_{\backslash h}, e_h))\} = 0$

(M) *C-1* $\sum_{h=1}^{H} x_h^{\backslash} - \sum_{h=1}^{H} e_h^{\backslash} = 0$

Y se define la siguiente función $F: \Xi \times \mathbb{R}_{++}^{CH} \to \mathbb{R}^{dim\Xi}$

$$F(\xi, e) := \left(\left(F^{(h.1)}(\xi, e), F^{(h.2)}(\xi, e), F^{(h.3)}(\xi, e)\right)_{h\in H}, F^{(M)}(\xi, e)\right)$$

Donde para cada $h \in H$,

$F^{(h.1)}(\xi, e) := D_{x_h} u_h(x_h, x_{\backslash h}, e_h) - \lambda_h p + \mu_h D_{x_h} \chi_h(x_h, x_{\backslash h}, e_h)$

$F^{(h.2)}(\xi, e) := -p(x_h - e_h)$

$F^{(h.3)}(\xi, e) := min\{\mu_h, \chi_h(x_h, x_{\backslash h}, e_h))\}$

$F^{(M)}(\xi, e) := \sum_{h=1}^{H} x_h^{\backslash} - \sum_{h=1}^{H} e_h^{\backslash}$

De la definición **(5)** se tiene que dados $(u, \chi) \in \mathcal{U}^H \times \mathcal{X}^H$, un elemento genérico $\xi \in \Xi$ es un Equilibrio extendido para $e \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$ si, y sólo si, $F(\xi^*, e) = F_e(\xi^*) = 0$

4.2. *Test Economy* y definición de la homotopía

Se introduce el concepto de "localización Pareto óptima" para construir el *test economy*.

Definición 6: dada una dotación arbitraria del bien $e \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$, una localización $x^{**} \in \mathbb{R}_{-+}^{CH}$ es Pareto óptima si no existe $x' \in \mathbb{R}_{-+}^{CH}$ tal que

1. $\sum_{h=1}^{H} x'_h = \sum_{h=1}^{H} x_h^{**}$, y
2. $\left(u_h(x'_h, e_{\backslash h}, e_h)\right)_{h\in H} > \left(u_h(x_h^{**}, e_{\backslash h}, e_h)\right)_{h\in H}$.

Hay una localización Pareto óptima $x_h^{**} \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$ tal que $\sum_{h=1}^{H} x_h^{**} = \sum_{h=1}^{H} e_h$, y que existe $((\theta_h^{**})_{h\neq 1}, \gamma^{**}) \in \mathbb{R}_{++}^{H-1} \times \mathbb{R}_{++}^{C}$, tal que $(x_h^{**}, (\theta_h^{**})_{h\neq 1}, \gamma^{**})$ es la única solución al siguiente sistema de ecuaciones

(1) $D_{x_1} u_1(x_1, e_{\backslash 1}, e_1) - \gamma$ =0

(2) $(\theta_h D_{x_h} u_h(x_h, e_{\backslash h}, e_h) - \gamma)_{h\neq 1}$ =0

(3) $\left(u_h\left(x_h, e_{\setminus h}, e_h\right) - u_h\left(x_h^{**}, e_{\setminus h}, e_h\right)\right)_{h\neq 1}$ =0

(4) $-\sum_{h=1}^{H} x_h + \sum_{h=1}^{H} x_h^{**}$ =0

El *test economy* es x_h^{**}. Entonces, para cada $\tau \in [0,1]$ y $x \in \mathbb{R}_{-+}^{CH}$ se define $x_{\setminus h}^{\tau} \coloneqq (1-\tau)x_{\setminus h} + \tau x_{\setminus h}^{**}$ y $e_h^{\tau} \coloneqq (1-\tau)e_h + \tau x_h^{**}$

Se considera el siguiente sistema:

(h.1) $$D_{x_h}u_h\left(x_h, (1-\tau)x_{\setminus h} + \tau e_{\setminus h}, e_h\right) - \lambda_h p + \mu_h(1-\tau)D_{x_h}\chi_h\left((1-\tau)x_h + \tau\tilde{x}_h\left(x_{\setminus h}^{\tau}, e_h^{\tau}\right), x_{\setminus h}^{\tau}, e_h^{\tau}\right) = 0$$

(h.2) $$-px_h + pe_h^{\tau} = 0$$

(h.3) $$min\left\{\mu_h, \chi_h\left((1-\tau)x_h + \tau\tilde{x}_h\left(x_{\setminus h}^{\tau}, e_h^{\tau}\right), x_{\setminus h}^{\tau}, e_h^{\tau}\right)\right\} = 0$$

(M) $$\sum_{h=1}^{H} x_h^{\setminus} - \sum_{h=1}^{H} e_h^{\tau\setminus} = 0$$

Se define la siguiente homotopía $H_e\colon \Xi \times [0,1] \to \mathbb{R}^{\dim \Xi}$,

Homotopía[30] M:

$$H_e(\xi,\tau) \coloneqq \left(\left(H_e^{(h.1)}(\xi,\tau), H_e^{(h.2)}(\xi,\tau), H_e^{(h.3)}(\xi,\tau)\right)_{h\in H}, H_e^{(M)}(\xi,\tau)\right) \qquad \textbf{(M)}$$

Para cada $h \in H$

$H_e^{(h.1)}(\xi,\tau) \coloneqq D_{x_h}u_h\left(x_h, (1-\tau)x_{\setminus h} + \tau e_{\setminus h}, e_h\right) - \lambda_h p + \mu_h(1-\tau)D_{x_h}\chi_h\Big((1-\tau)x_h +$
$\tau xhx\setminus h\tau{,}eh\tau{,}x\setminus h\tau{,}eh\tau$

$H_e^{(h.2)}(\xi,\tau) \coloneqq -px_h + pe_h^{\tau}$

$H_e^{(h.3)}(\xi,\tau) \coloneqq min\left\{\mu_h, \chi_h\left((1-\tau)x_h + \tau\tilde{x}_h\left(x_{\setminus h}^{\tau}, e_h^{\tau}\right), x_{\setminus h}^{\tau}, e_h^{\tau}\right)\right\}$

$H_e^{(M)}(\xi,\tau) \coloneqq \sum_{h=1}^{H} x_h^{\setminus} - \sum_{h=1}^{H} e_h^{\tau\setminus}$

[30]Suponga X, Y sean dos espacios topológicos arbitrarios. Dos funciones f, $f'\colon X \to Y$ son homotópicas si hay una función continua $F\colon X \times [0,1] \to Y$, llamada una homotopía, tal que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = f'(x)$ para todo $x \in X$, es decir, si f puede ser deformada continuamente en f', Mas-Colell (1985, p. 45)

Se observa que (ξ,τ) es una solución al Sistema **(L)** si, y sólo si, $H_e(\xi,\tau)=0$. Finalmente se define

$$G:\xi\in\Xi\rightarrow G(\xi)\coloneqq H_e(\xi,1)\in\mathbb{R}^{dim\Xi}$$

Esto es

$$G(\xi)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}D_{x_h}u_h\left(x_h,e_{\backslash h},e_h\right)-\lambda_h p\\ -px_h+px_h^{**}\\ min\left\{\mu_h,\chi_h\left(\tilde{x}_h\left(x_{\backslash h}^{**},x_h^{**}\right),x_{\backslash h}^{**},x_h^{**}\right)\right\}\end{pmatrix}_{h\in\mathcal{H}}\\ \sum_{h=1}^{H}x_h^{\backslash}-\sum_{h=1}^{H}x_h^{**\backslash}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{dim\Xi}\qquad\textbf{(N)}$$

Se observa que H_e es una función continua porque está compuesta por funciones continuas (ver Supuestos **(1.1.c)**, **(2.1.b)**, **(2.1.c)**, y la Proposición **(1)**), y que

$$H_e(\xi,0)=F_e(\xi,e)=F_e(\xi)\ y\ H_e(\xi,1)=G(\xi)$$

4.3. Propiedades de la Homotopía

Para verificar los Supuestos del Teorema **(2)**, se muestran los siguientes lemas.

Lema 1 $G^{-1}(0)=\{\xi^{**}\}$, con $\xi^{**}\coloneqq\left(x^{**},\lambda^{**},\mu^{**},p^{**\backslash}\right)$, donde

$\lambda_1^{**}\coloneqq\gamma^{**C}$

$\lambda_h^{**}\coloneqq\frac{\gamma^{**C}}{\theta_h^{**}}$ para cada $h\in\{2,\dots,H\}$,

$\mu_h^{**}\coloneqq 0$ para cada $h\in\mathcal{H}$, y

$p^{**\backslash}\coloneqq\frac{\gamma^{**\backslash}}{\gamma^{**C}}$

Y G es C^1 En una vecindad abierta de ξ^{**}.

Lema 2 $D_\xi G(\xi^{**})$ tiene rango $dim\Xi$.

Lema 3 Para cada $e\in\mathbb{R}_{++}^{CH}$, $H_e^{-1}(0)$ es compacto.

De modo que se define a F_e (como la función f) y se construye una economía apropiada llamada *Test Economy.* Entonces, usando el *Test Economy*, Del Mercato construye la función G (que es definida como la función g) y la homotopía H_e (que hace el papel de L) desde la función F_e a la función G

Finalmente, se muestran otros resultados necesarios, $G^{-1}(0) = \{\xi^{**}\}$ y G es C^1 en una vecindad abierta de $G^{-1}(0)$; $D_\xi G(\xi^{**})$ tiene rango completo; $H_e^{-1}(0)$ es compacto.

Para probar el Teorema **(2)**[31], se aplica el siguiente teorema

Teorema 3: (Teorema de Homotopía) Suponga que M *y* N sean dos variedades sin límites de la misma dimensión*,* $y \in N$ y $f, g: M \rightarrow N$ tal que:

1. f es C^0 y g es C^0 y C^1 en una vecindad abierta de $g^{-1}(y)$*;*
2. $\#\, g^{-1}(y)$ es singular, y es un valor regular para g*;*
3. Existe una homotopía continua L de f a g tal que $L^{-1}(y)$ es compacto. Entonces $f^{-1}(y) \neq \emptyset$*.*

Intuitivamente se puede tener que la homotopía $H_e(\xi, \tau)$ es un camino que va de f a g, que resulta en un equilibrio con determinados niveles de consumo y dotaciones, que cumplen con el conjunto de restricciones. Fácilmente se puede caer en el concepto de correspondencia, pero debe recordarse que la homotopía es una deformación.

[31]El Teorema **(3)** es un resultado conocido en *Degree Theory.*

5. UN EJERCICIO

Se parte de una economía de intercambio puro con dos individuos (hogares o agentes), A y B, en las que la función de utilidad de cada individuo está influenciada por las decisiones de consumo del otro agente, cada función de utilidad esta descrita así[32]:

$$u_A = \left(x_A^{1/(1-\gamma)}\ x_B^{-\gamma/(1-\gamma)}\right)^{\alpha}\left(y_A^{1/(1-\beta)}\ y_B^{-\beta/(1-\beta)}\right)^{1-\alpha} \qquad \textbf{(1)}$$

$$u_B = \left(x_A^{-\mu/(1-\mu)}\ x_B^{1/(1-\mu)}\right)^{\theta}\left(y_A^{-\xi/(1-\xi)}\ y_B^{1/(1-\xi)}\right)^{1-\theta} \qquad \textbf{(2)}$$

Donde:

$0 < \alpha, \theta, \gamma, \beta, \mu, \xi < 1.$[33]

u_A y u_B: son las funciones de utilidad del individuo A y B, respectivamente;

s_i: es el consumo del bien $s = \{x\ , y\}$ realizado por individuo *i* = {A, B};

Se tiene que la utilidad marginal del individuo A es positiva con respecto a s_A, pero negativa ante incrementos de s_B, caso contrario para el individuo B en que la utilidad marginal es positiva con respecto a s_B, pero negativa con respecto a s_A. Por tanto la externalidad negativa, para el consumidor A, generada por el consumo de los bienes $s = \{x\ , y\}$ realizado por el individuo B y se debe a que los factores $-\gamma/(1-\gamma) < 0$ y $-\beta/(1-\beta) < 0$ son negativos. El hecho que γ (μ), este entre cero y uno implica que el consumo de x realizado por el individuo B (A), (x_B) ((x_A)), influencia negativamente la utilidad del individuo A (B), (u_A) ((u_A)), así que los individuos exhiben envidia. En otras palabras, γ, β, μ, ξ expresan las preferencias de los individuos frente a los bienes x e y, de la misma forma se pueden interpretar los parámetros.

El problema que enfrentan los individuos (ya sea, el individuo A o B) seria entonces maximizar su función de utilidad respecto al consumo que realiza cada uno de ellos de la cesta s, tomando como dada su restricción presupuestaria.

[32]Las funciones de utilidad describen las preferencias del consumidor, de manera que se cumplen las propiedades neoclásicas; monotonicidad, no saciabilidad y convexidad.

[33]Si $\gamma > 1$ o $\gamma < 0$ el consumo de x realizado por el individuo B impacta positivamente la utilidad del individuo A, entonces el individuo A exhibe altruismo. Si $\gamma = 0$ el consumo de x realizado por el individuo B no impacta la utilidad del individuo A, entonces el individuo A es indiferente. Análogamente, para β, μ, ξ.

La restricción de cada individuo viene descrita por:

$$px_A + qy_A = pe_A^x + qe_A^y \qquad \textbf{(3)}$$

$$px_B + qy_B = pe_B^x + qe_B^y \qquad \textbf{(4)}$$

En donde:

p: es el precio del bien x;

q: es el precio del bien y;

e_i^j: es la dotación del bien $j = \{x, y\}$ que posee el individuo $i = \{A, B\}$;

En la que hay una localización factible para la economía si:

$$x_A + x_B = e_A^x + e_B^x \qquad \textbf{(5)}$$

$$y_A + y_B = e_A^y + e_B^y \qquad \textbf{(6)}$$

El consumo total de la economía no excede las dotaciones agregadas de la economía.

De modo que, cada agente maximiza su función de utilidad respectiva, en función del consumo de cada agente, se plantea la función de Lagrange correspondiente al problema del individuo A:

$$\mathcal{L}^A = u_A - \lambda\left[p(x_A - e_A^x) + q(y_A - e_A^y)\right]$$

Las condiciones de primer orden (CPO) del Lagrangeano son:

$$\mathcal{L}_{x_A}^A = \frac{\alpha}{1-\gamma}\frac{x_A^{\alpha/(1-\gamma)}}{x_A} x_B^{-\alpha\gamma/(1-\gamma)} y_A^{(1-\alpha)/(1-\beta)} y_B^{-\beta(1-\alpha)/(1-\beta)} - \lambda p$$

$$\mathcal{L}_{y_A}^A = \frac{1-\alpha}{1-\beta} x_A^{\alpha/(1-\gamma)} x_B^{-\alpha\gamma/(1-\gamma)} \frac{y_A^{(1-\alpha)/(1-\beta)}}{y_A} y_B^{-\beta(1-\alpha)/(1-\beta)} - \lambda q$$

De las CPO se tiene que:

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{p}{q}\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\alpha(1-\beta)} \qquad \textbf{(7)}$$

Reemplazando **(7)** en **(3)** se obtiene:

$$px_A\psi = pe_A^x + qe_A^y \qquad \textbf{(8)}$$

Donde:

$$\psi = 1 + \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\alpha(1-\beta)} \qquad \textbf{(9)}$$

Despejando x_A en **(8)** se obtiene la función de demanda del x para el consumidor A:

$$x_A^* = \frac{1}{\psi}\left(e_A^x + \frac{q}{p}e_A^y\right) \qquad \textbf{(10)}$$

Reemplazando **(10)** en **(7)** se obtiene la función de demanda del bien x para el consumidor A:

$$y_A^* = \frac{\psi-1}{\psi}\left(\frac{p}{q}e_A^x + e_A^y\right) \quad \textbf{(11)}$$

De igual forma, se plantea la función de Lagrange correspondiente al problema del individuo B:

$$\mathcal{L}^B = u_B - \lambda\left[p(x_B - e_B^x) + q(y_B - e_B^y)\right]$$

Resolviendo a partir der las CPO y simplificando se tiene que:

$$\frac{y_B}{x_B} = \frac{p}{q}\frac{(1-\theta)(1-\mu)}{\theta(1-\xi)} \quad \textbf{(12)}$$

Reemplazando **(12)** en **(4)**, se tiene:

$$p\delta x_B = pe_B^x + qe_B^y \qquad \textbf{(13)}$$

Donde:

$$\delta = 1 + \frac{(1-\theta)(1-\mu)}{\theta(1-\xi)} \qquad \textbf{(14)}$$

Despejando x_B y reemplazando en **(12)** se obtienen las funciones de demanda del consumidor B:

$$x_B^* = \frac{1}{\delta}\left(e_B^x + \frac{q}{p}e_B^y\right) \qquad \textbf{(15)}$$

$$y_B^* = \frac{\delta-1}{\delta}\left(\frac{p}{q}e_B^x + e_B^y\right) \qquad \textbf{(16)}$$

Entonces se busca un sistema de precios que iguale las ofertas y demandas agregadas en todos los mercados y que cada consumidor satisfaga sus preferencias al máximo dentro de su conjunto de consumo sujeto a su restricción presupuestaria, Monsalve, (2002, p. 13).

Las condiciones de vaciado del mercado y cierre del modelo son:

$$(x_A + x_B) - (e_A^x + e_B^x) = 0 \qquad \textbf{(17)}$$

$$(y_A + y_B) - \left(e_A^y + e_B^y\right) = 0 \qquad \textbf{(18)}$$

Reemplazando **(10)** y **(15)** en **(17)** se tiene que:

$$\frac{1}{\psi}\left(e_A^x + \frac{q}{p}e_A^y\right) + \frac{1}{\delta}\left(e_B^x + \frac{q}{p}e_B^y\right) - e_A^x - e_B^x = 0$$

Resolviendo precios se tiene que:

$$\frac{q}{p} = \frac{e_A^x\left(1-\frac{1}{\psi}\right)+e_B^x\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}{\frac{e_A^y}{\psi}+\frac{e_B^y}{\delta}} \qquad \textbf{(19)}$$

Análogamente para y, empleando **(11)**, **(16)** y **(18)**:

$$\frac{p}{q} = \frac{\frac{e_A^y}{\psi}+\frac{e_B^y}{\delta}}{e_A^x\left(1-\frac{1}{\psi}\right)+e_B^x\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}$$

En un mercado de equilibrio competitivo sólo se determinan precios relativos, así que el cociente de precios indica los términos de intercambio entre bienes. Para conocer cuantas unidades del bien x requieren ser intercambiadas para obtener una unidad del bien y, se asume que q es uno, $q = 1$, entonces:

$$p = \frac{\frac{e_A^y}{\psi}+\frac{e_B^y}{\delta}}{e_A^x\left(1-\frac{1}{\psi}\right)+e_B^x\left(1-\frac{1}{\delta}\right)} \qquad \textbf{(20)}$$

Se puede verificar que el precio p es positivo, debe tomarse en cuenta que las dotaciones de los agentes de cada bien son estrictamente positivas y que ψ, δ son mayores a uno. No obstante, si $\psi, \delta = 1$ con $p = 1$, entonces $q = 0$, pero esta situación no podría darse bajo las especificaciones de las funciones de utilidad (1) y (2).

En resumen, bajo una economía de intercambio puro con externalidades negativas en el consumo, con dotaciones positivas y con un sistema de preferencias, de características neoclásicas, se tiene un equilibrio general competitivo con precios positivos, en el cual se cumplen las condiciones de vaciado de mercado.

Para analizar el efecto sobre el consumo y los precios cuando hay ausencia de externalidades en la economía, bajo las especificaciones anteriores se tendría que: $\gamma, \beta, \mu, \xi = 0$. De modo que las funciones de utilidad se especifican de la siguiente manera:

$$u_A = x^{\alpha} y^{(1-\alpha)} \qquad \textbf{(1.a)}$$

$$u_B = x^{\theta} y^{(1-\theta)} \qquad \textbf{(2.a)}$$

Donde:

$x = \{x_A, x_B\}$

$y = \{y_A, y_B\}$

El consumo de equilibrio para el individuo A y para el individuo B seria:

$$x_A^* = \alpha \left(e_A^x + \frac{q}{p} e_A^y \right) \qquad \textbf{(3.a)}$$

$$y_A^* = (1 - \alpha) \left(\frac{p}{q} e_B^x + e_B^y \right) \qquad \textbf{(4.a)}$$

Los resultados (3.a) y (4.a) se comparan con los resultados obtenidos en la ecuación (10) y (11), de manera que el factor determinante de la diferencia entre consumos de equilibrio de x_A, cuando hay o no externalidades en el consumo, es determinado por:

$$\frac{1-\gamma}{1-\beta} = r \qquad \textbf{(21)}$$

Puesto que si $r = 1$ los niveles de consumo de x_A, x_B serian los mismos que en ausencia de externalidades, para evidenciar de una mejor forma esta situación se calculan las derivadas parciales del consumo de x_A con respecto a los parámetros γ, β, así:

$$\frac{\partial x_A}{\partial \gamma} = \frac{\alpha(1-\alpha)(1-\beta)}{(\alpha(1-\beta)+(1-\alpha)(1-\gamma))^2} > 0 \qquad \textbf{(22)}$$

En este caso, a medida que la externalidad es más “fuerte” (es mayor el parámetro), del consumo del bien x realizado por el individuo B, el consumo del individuo A seria mayor para éste. Pero hay una particularidad, el individuo podría optar por sustituir consumo entre $x\ e\ y$, y a medida que la externalidad es más “fuerte” en el bien y él optará por sustituir consumo de x por y:

$$\frac{\partial x_A}{\partial \beta} = \frac{-\alpha(1-\alpha)(1-\gamma)}{(\alpha(1-\beta)+(1-\alpha)(1-\gamma))^2} < 0 \qquad \textbf{(23)}$$

De manera más clara, se establece una comparación entre los consumos de equilibrio de la economía con externalidades y de la economía sin externalidades, los cuales están determinados por la relación entre $\frac{1}{\psi}$ en (10) y α en (3.a), y se tiene la siguiente especificación:

$$\frac{1}{\psi} \gtrless \alpha$$

$$\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha(1-\beta)+(1-\alpha)(1-\gamma)} \gtrless \alpha$$

$$\alpha(1-\alpha)\left[\frac{\gamma-\beta}{\alpha(1-\beta)+(1-\alpha)(1-\gamma)}\right] \gtrless 0 \qquad \textbf{(24)}$$

Este resultado indica que el consumo x_A depende básicamente de la diferencia entre γ, β, como se mencionó anteriormente el consumo del bien x_A será mayor a medida que la externalidad en este bien sea más "fuerte" que en el bien y_A, y sustituirá consumo entre x_A y y_A cuando es más "fuerte" la externalidad en y_A, ecuación (24). Por ello, el grado de "envidia" en los bienes, con respecto al consumo del individuo B, sería un incentivo para el individuo A.

Análogamente para el individuo B:

$$x_B^* = \theta\left(e_B^x + \frac{q}{p}e_B^y\right)$$

$$y_B^* = (1-\theta)\left(\frac{p}{q}e_B^x + e_B^y\right)$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial \mu} = \frac{\theta(1-\theta)(1-\xi)}{\left(\theta(1-\xi)+(1-\theta)(1-\mu)\right)^2} > 0$$

$$\frac{\partial x_A}{\partial \beta} = \frac{-\theta(1-\theta)(1-\mu)}{(\theta(1-\xi)+(1-\theta)(1-\mu))^2} < 0$$

Bajo la economía sin externalidades, se tiene una razón de precios dada por:

$$\frac{q}{p} = \frac{e_A^x(1-\alpha)+e_B^x(1-\theta)}{\alpha e_A^y+\theta e_B^y} \qquad \textbf{(5.a)}$$

Esta razón indica que el precio q está en función de las dotaciones de los agentes y de los parámetros α, θ. Si se comparan los precios de equilibrio (5.a) con los obtenidos en la ecuación (19), no se puede inferir fácilmente las diferencias, ya que en la economía con externalidades hay dependencias en los valores de los parámetros, más específicamente en las diferencias entre $(\gamma-\beta)$, $(\xi-\mu)$ y de la diferencia conjunta $(\gamma-\beta)-(\xi-\mu)$.

Por otra parte, cuando las externalidades solo influencian al individuo A, las cantidades consumidas por el agente B serian equivalentes a las cantidades consumidas bajo competencia perfecta en una economía de dotación, mientras que para el agente A las cantidades dependerán directamente de las diferencias entre $(\gamma-\beta)$, como se mostró en el caso anterior. A su vez, los precios serán determinados por la “fuerza” de las externalidades en la utilidad del individuo A, por tanto dependerá de preferencias especificas.

$$\frac{q}{p} = \frac{e_A^x\left(1-\frac{1}{\psi}\right)+e_B^x(1-\theta)}{\frac{e_A^y}{\psi}+\theta e_B^y} \qquad \textbf{(6.a)}$$

6 CONCLUSIONES

Las aproximaciones al equilibrio general en economías con externalidades pueden ser de dos tipos: de un lado las aproximaciones al equilibrio general, y del otro se tienen las aproximaciones diferenciables de modelos de equilibrio general. Esta última, emplea desarrollos de topología matemática, ya que es necesario hacer uso de esta herramienta para la prueba de existencia en modelos de equilibrio general que aseguran consistencia al modelo, en el caso de modelos que requieren de existencia genérica (del equilibrio general), en las últimas décadas, se han empleado nuevas metodologías que involucran argumentos homotópicos y *Degree Theory,* (Villanacci, Carosi, Benevieri, y Battinelli 2002).

Trabajos como el realizado por Del Mercato (2004) demuestran la existencia de equilibrio general en una economía con externalidades desde el punto de vista diferencial, teniendo en cuenta que las decisiones de consumo para un individuo dependen de las decisiones de los otros agentes. Muestra que bajo ciertas especificaciones de los conjuntos de consumo, de dotaciones y de restricciones existe un equilibrio en la economía con precios positivos y que, además, se cumplen las condiciones de vaciado del mercado.

En el marco planteado por Del Mercato (2004), se realiza un ejercicio para dos agentes con dos bienes de consumo y unas preferencias tipo Cobb-Douglas que conservan las características de la externalidad arriba mencionadas, el consumo y las preferencias de los hogares están determinadas por el consumo de los otros agentes y de las dotaciones de cada hogar.

Así, bajo ciertas condiciones de las externalidades, las cantidades demandadas son las mismas que se tendrían bajo competencia perfecta, pero con menor utilidad para los agentes. Además, los individuos optarán por sustituir consumo entre bienes dependiendo de los niveles de cada externalidad, es decir, optará por consumir más del bien que genere una externalidad relativamente mayor a la de los otros bienes.

7. BIBLIOGRAFÍA

Alonso, Caballé y Raurich, (2004). Consumption externalities, habit formation and equilibrium efficiency. *The Scandinavian Journal of Economics, Vol 106 No. 2*, pp. 231-251.

Arrow y Drebreu, (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica, Vol. 22, No 3*, pp. 265-290.

Arrow y Intriligator, (2000). Historical introduction. En K. J. Arrow, y M. D. Intriligator, *Handbook of Mathematical Economics. Ed. 4, Vol. 1*, pp. 1-14.

Baumol, W. J. y Oates, W. E. (1982). *La teoría de la política económica del medio ambiente*. Barcelona: Antoni Bosch editor, S.A.

Bonnisseau y Del Mercato, (2009). Externalities, consumption constraints and regular economies. *Springer-Verlag, Research Article*.

Carbone y Smith, (2008). Evaluating policy interventions with general equilibrium externalities. *Journal of Public Economics 92*, pp. 1254-1274.

Coase, (1960). The problem of social cost. *Journal of Law and Economics, 3*, pp. 1-44.

Cornet y Topuzu, (2005). Existence of equilibria for economies with externalities and a measure space of consumers. *Economic Theory, Vol. 26, No 2, Rationality and Equilibrium: A Symposium in Honor of Marcel K. Richter*, pp. 397-421.

Debreu, (1982), Existence of competitive equilibrium. En *Handbook of Mathematical Economics, Vol. 2*, pp. 697-743.

Del Mercato, (2004). Existence of competitive equilibria with externalities: a differential viewpoint. *Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche, Universit`a degli Studi di Salerno. Salerno, Italy*.

Del Mercato y Platino, (2010). Externalities in production economies and existence of competitive equilibria: A differentiable approach. *Université Paris 1 Panthéon–Sorbonne.*

Evans y Hnatkovska, (2005). Solving general equilibrium models with incomplete markets and many assets. *NBER, Technical Working Paper, No. 318*.

Fuentes, (2009). General equilibrium in economies with externalities and nonconvex production sets in an infinite dimensional commodity space. *Universidad de San Martín*.

Greenberg, Shitovitz y Wieczorek, (1979). Existence of equilibria in atomless production economies with price-dependent preferences. *Journal of Mathematical Economics 6*, 31-41.

Kehoe, Levine y Romer, (1990). On characterizing equilibria of economies with externalities and taxes as solutions to optimization problems. *Federal Reserve Bank of Minneapolis, Research Departament, Working Paper, No. 436.*

Londoño, L. J., y Saldarriaga J. P. (2003). *Aproximación al equilibrio económico*. Tesis para optar al título de Economista. Universidad de Antioquia, Facultad de Ciencias Económicas.

Mas-Colell, A. (1985). *The theory of general economic equilibrium: A differentiable approach*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., y Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory*. New York: Oxford University Press.

Monsalve, S. (2002). *Introducción a los conceptos de equilibrio en economía*. Bogota D.C: Universidad Nacional de Colombia.

Murty, (2006). Externalities and fundamental nonconvexities: A reconciliation of approaches to general equilibrium externality modelling and implications for decentralization. *Journal of Economic Literature, Warwick Economic Research Papers, No. 756*.

Ren, Fullerton y Braden, (2010). Optimal taxation of externalities interacting through markets: A theorical general equilibrium analysis. *CES info, Working Paper No. 3259.*

Sandmo, (1975). Optimal taxation in the presence of externalities. *The Swedish Journal of Economics, Vol. 77, No. 1, Public Finance: Allocation and Distribution*, pp. 86-98.

Stiglitz, J. E. (1988). *La economía del sector público*. Barcelona: Antoni Bosch editor, S.A.

Villanacci, A., Carosi, L., Benevieri, P., y Battinelli, A. (2002). *Differential topology and general equilibrium with complete and incomplete markets*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Villar, A. (1996). *Curso de microeconomía avanzada: Un enfoque de equilibrio general*. Barcelona: Antoni Bosch editor, S.A.